

# Entwicklung stochastischer Charakteristika der FE-Lösung von Wärmeleitproblemen mit zufälligem Koeffizienten

Holger Hähnel, Jürgen vom Scheidt

Technische Universität Chemnitz, Fakultät für Mathematik,  
09107 Chemnitz, Germany

## Zusammenfassung

Untersucht werden instationäre Wärmeleitprobleme mit gemischten Randbedingungen 2. und 3. Art. Die Probleme weisen als stochastische Einflussgröße einen zufälligen Wärmeleitkoeffizienten auf. Aus einer Ortsdiskretisierung nach dem Vorbild der Methode der finiten Elemente (FEM) geht ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen mit zufälliger Systemmatrix hervor. Unter der Annahme kleiner stochastischer Schwankungen lässt sich die Lösung der zugehörigen Anfangswertaufgabe als Entwicklung bezüglich eines Störungsparameters  $\eta$  darstellen. Dies ermöglicht die genäherte Berechnung von Erwartungswert- und Korrelationsfunktion der approximativen Lösung des ursprünglichen Randanfangswertproblems. Konkrete Berechnungen werden für ein eindimensionales Wärmeleitproblem angegeben, wobei der Wärmeleitkoeffizient als zufällige Funktion sowie als Zufallsgröße modelliert wird.

*Schlagworte:* Wärmeleitung, Störungsrechnung, Finite-Elemente-Methode, Partielle Differentialgleichung

*MSC2000 Klassifikation:* 60H10, 34F05, 93E03

# 1 Problemstellung

Den Ausgangspunkt unserer Überlegungen bildet ein allgemeines  $d$ -dimensionales Wärmeleitproblem mit gemischten Randbedingungen 2. und 3. Art.

Gesucht wird eine Funktion  $u : \overline{\mathfrak{D}} \times [0, T] \times \Omega \rightarrow \mathbf{R}$ , mit  $\overline{\mathfrak{D}} \subset \mathbf{R}^d$ , für welche die Differentialgleichung

$$c\rho \frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{i=1}^d \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \lambda(x, \omega) \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) = f(x, t) \quad \text{für } (x, t) \in \mathfrak{D} \times (0, T],$$

die Randbedingungen

$$\lambda(x, \omega) \frac{\partial u}{\partial n} = g_2(x, t) \quad \text{für } (x, t) \in \Gamma_2 \times (0, T] \quad \text{und} \quad (1.1)$$

$$\lambda(x, \omega) \frac{\partial u}{\partial n} + \alpha(x, t)(u(x, t) - u_A(x, t)) = 0 \quad \text{für } (x, t) \in \Gamma_3 \times (0, T]$$

$$\text{sowie die Anfangsbedingung} \quad u(x, 0) = u_0(x) \quad \text{für } x \in \overline{\mathfrak{D}}$$

erfüllt sind.

Alle Beziehungen sind im fast sicheren Sinn zu verstehen, d. h. für alle  $\omega \in \Omega$  mit Ausnahme einer Menge  $N \subset \Omega$  mit  $\mathbf{P}(N) = 0$ . Mit  $\partial u / \partial n$  ist die Ableitung in Richtung der nach außen gerichteten Normalen

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \sum_{i=1}^d \frac{\partial u}{\partial x_i} n_i$$

bezeichnet. Die gesuchte Temperaturverteilung  $u(x, t, \omega)$  im Gebiet  $\mathfrak{D}$  unterliegt den Parametern

- $c$  - (konstante) spezifische Wärmekapazität,
- $\rho$  - (konstante) Dichte,
- $\lambda(x, \omega)$  - zufälliger Wärmeleitkoeffizient im Gebiet  $\mathfrak{D}$ ,
- $f(x, t)$  - innere Wärmequellen oder -senken,
- $g_2(x, t)$  - Wärmeeinstrom am Rand  $\Gamma_2$ ,
- $\alpha(x, t)$  - Wärmeaustauschkoeffizient am Rand  $\Gamma_3$  und
- $u_A(x, t)$  - Umgebungstemperatur am Rand  $\Gamma_3$ .

Im Sinne einer realitätsnahen Modellierung ließe sich hinterfragen, inwieweit eine stochastische Wärmeleitfähigkeit (Wärmeleitkoeffizient) auch eine zufällige Natur von Wärmekapazität und Dichte nach sich ziehen müsse, da alle drei Größen Materialeigenschaften widerspiegeln. Vereinfachend wollen wir im Folgenden die Konstanz von  $c$  und  $\rho$  unterstellen und das Produkt zu  $c\rho = 1$  normieren.

Die Arten der Randbedingungen als Neumann- bzw. Robin-Randbedingungen finden sich häufig in realen Problemstellungen wieder. Sie werden für den eindimensionalen Fall noch konkretisiert.

## 2 Variationsformulierung und Diskretisierung

Um zur „schwachen“ Formulierung des Problems zu gelangen, wird die Differentialgleichung aus (1.1) zunächst mit einer so genannten Testfunktion  $v$  aus dem Funktionenraum

$$V_0 := \{v \in H^1(\mathfrak{D}) : v = 0 \text{ auf } \Gamma_1\}$$

multipliziert. Dabei bezeichnet  $\Gamma_1$  den Rand mit Randbedingungen 1. Art (Vorgabe einer Randtemperatur), so dass für unseren Problemtyp  $\Gamma_1 = \emptyset$  gilt. Damit entspricht  $V_0$  gerade dem Sobolov-Raum  $H^1(\mathfrak{D})$  der einmal über  $\mathfrak{D}$  im verallgemeinerten Sinn differenzierbaren Funktionen, deren verallgemeinerte Ableitungen zum Raum  $L_2(\mathfrak{D})$  gehören.

Die folgenden Überlegungen werden zunächst die Zufallsabhängigkeit der Lösung vernachlässigen.

Nach Anwendung der partiellen Integration entsteht die Variationsformulierung, in welche die Randbedingungen „eingebettet“ sind:

Gesucht ist eine Funktion

$$u \in V := \{u(\cdot, t) \in H^1(\mathfrak{D}) \text{ für alle } t \in [0, T]\},$$

so dass

$$\begin{aligned} (u_t, v)_0 + a(t; u, v) &= \langle F(t), v \rangle \text{ mit} \\ \text{AB} \quad (u(\cdot, 0), v)_0 &= (u_0, v)_0 \end{aligned} \quad (2.1)$$

für alle  $v \in V_0$  gilt.

Dabei bezeichnet  $(\cdot, \cdot)_0$  das  $L_2$ -Skalarprodukt, d. h.  $(u, v)_0 = \int_{\mathfrak{D}} u(x)v(x) dx$ . Des Weiteren sind die Bilinearform  $a(t, \cdot, \cdot)$  und die Linearform  $\langle F(t), \cdot \rangle$  für das allgemeine  $d$ -dimensionale Problem (vgl. (1.1)) gegeben durch

$$a(t; u, v) = \int_{\mathfrak{D}} \lambda(x) (\nabla u(x, t))^{\top} \nabla v(x) dx + \int_{\Gamma_3} \alpha(x, t) u(x, t) v(x) ds \quad (2.2)$$

$$\langle F(t), v \rangle = \int_{\mathfrak{D}} f(x, t) v(x) dx + \int_{\Gamma_2} g_2(x, t) v(x) ds + \int_{\Gamma_3} \alpha(x, t) u_A(x, t) v(x) ds. \quad (2.3)$$

Die Idee der Finite-Elemente-Methode besteht in der Diskretisierung der Funktionenräume  $V_0$  und  $V$  zu den endlich-dimensionalen Räumen

$$\begin{aligned} V_{0h} &= \{v_h(x) : v_h(x) = \sum_{j \in \chi_h} v_j p_j(x)\} \text{ und} \\ V_h &= \{u_h(x, t) : u_h(x, t) = \sum_{j \in \chi_h} u_j(t) p_j(x)\}. \end{aligned}$$

Die Ansatzfunktionen  $p_j$  besitzen endlichen („finiten“) Träger und bilden eine Basis des  $V_{0h}$ . Die Funktion  $u_h(x, t)$  approximiert als Linearkombination der  $p_j$  schließlich die Lösung der Variationsformulierung (2.1) und damit auch die „klassische“ Lösung aus (1.1).

In der Indexmenge  $\chi_h = \{1, \dots, N_h\}$  sind die Nummern aller Knotenpunkte enthalten. Die Knoten generieren damit eine FE-Vernetzung  $\mathcal{T}_h = \{T^{(r)} : r \in \varrho_h\}$  mit  $\overline{\mathfrak{D}} = \bigcup_{r \in \varrho_h} \overline{T}^{(r)}$ . Unter  $\varrho_h = \{1, \dots, R_h\}$  sei die Indexmenge der Nummern der finiten Elemente zu verstehen. Im eindimensionalen Fall handelt es sich bei  $T^{(r)}$  um Strecken, im zweidimensionalen Fall um Drei- oder Vierecke. Mit  $h$  ist der maximale Elementdurchmesser der Vernetzung bezeichnet. (vgl. etwa [6])

Überträgt man diesen Ansatz auf die verallgemeinerte Aufgabe (2.1), erhält man die (semi)diskretisierte Variationsformulierung. Setzt man darin für  $v_h$  die Ansatzfunktionen  $p_i, i = 1, \dots, N_h$ , ein, so ergibt sich das System von gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} M_h \dot{\underline{u}}_h(t) + K_h(t) \underline{u}_h(t) &= \underline{f}_h(t) \\ \text{mit AB} \quad M_h \underline{u}_h(0) &= \underline{d}_h. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Dabei sind

$$\begin{aligned} \underline{u}_h(t) &= (u_j(t))_{j \in \chi_h}^\top, & \text{der Vektor der Koeffizientenfunktionen,} \\ M_h &= ((p_i, p_j)_0)_{i,j \in \chi_h}, & \text{die Massematrix,} \\ K_h(t) &= (a(t; p_i, p_j))_{i,j \in \chi_h}, & \text{die Steifigkeitsmatrix,} \\ \underline{f}_h(t) &= (\langle F(t), p_i \rangle)_{i \in \chi_h}^\top, & \text{der Lastvektor, und} \\ \underline{d}_h &= ((u_0, p_i)_0)_{i \in \chi_h}^\top, & \text{die Momente der Anfangstemperatur.} \end{aligned}$$

**Bemerkung 2.1** Aus (2.2) wird deutlich, dass die Steifigkeitsmatrix  $K_h$ , und damit die Systemmatrix  $A_h = M_h^{-1} K_h$ , nur dann von  $t$  abhängig ist, wenn dies für die Wärmeleitfähigkeit  $\lambda$  oder den Wärmeaustauschkoeffizient  $\alpha$  gilt. Beide Materialparameter sollen im Weiteren als zeitunabhängig vorausgesetzt werden.

**Bemerkung 2.2** Schließt man die Materialparameter  $c$  und  $\rho$  (möglicherweise sogar ortsabhängig bzw. zufällig) in die Betrachtungen ein, so muss die Massematrix im Differentialgleichungssystem zu

$$\widehat{M}_h = ((c\rho p_i, p_j)_0)_{i,j \in \chi_h}$$

modifiziert werden. Die Massematrix in der Anfangsbedingung bliebe dann jedoch unverändert.

### 3 Entwicklung der FE-Lösung $\underline{u}(t)$

Ausgehend von der Lösung des FE-Differentialgleichungssystems (2.4) soll in den folgenden Betrachtungen eine Entwicklung der Erwartungswert- und Korrelationsfunktion der approximativen Lösung  $u_h$  erarbeitet werden. Den Diskretisierungsparameter  $h$  wollen wir (mit Ausnahme der Unterscheidung zwischen der exakten Lösung  $u(x, t)$  und der Näherungslösung  $u_h(x, t)$ ) aus Gründen der Übersichtlichkeit vernachlässigen.

Beim Wärmeleitkoeffizienten  $\lambda$  handele es sich um ein zufälliges Feld

$$\lambda(x, \omega) = \lambda_0(x) + \eta \lambda_1(x, \omega) \quad \text{mit} \quad \mathbf{E} \lambda_1(x) = 0 \quad (3.1)$$

mit dem reellen Störungsparameter  $\eta$ .

Mittels dieses Ansatzes lässt sich die Steifigkeitsmatrix in einen deterministischen und einen zentrierten stochastischen Anteil separieren. Es gilt

$$\begin{aligned} K(\omega) &= \widehat{K} + \eta \widetilde{K}(\omega) \\ \text{mit} \quad \widehat{K} &= \left( \int_{\mathfrak{D}} \lambda_0(x) (\nabla p_i(x))^\top \nabla p_j(x) \, dx + \int_{\Gamma_3} \alpha(x) p_i(x) p_j(x) \, ds \right)_{i,j \in \chi_h} \\ \text{und} \quad \widetilde{K}(\omega) &= \left( \int_{\mathfrak{D}} \lambda_1(x, \omega) (\nabla p_i(x))^\top \nabla p_j(x) \, dx \right)_{i,j \in \chi_h}. \end{aligned}$$

Somit ist das FE-System gegeben durch

$$\begin{aligned} M \underline{u}(t) + (\widehat{K} + \eta \widetilde{K}) \underline{u}(t) &= \underline{f}(t) \\ \text{mit AB} \quad M \underline{u}(0) &= \underline{d}. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Verallgemeinert man den Satz über implizite Funktionen auf Funktionen in Banach-Räumen (vgl. etwa [8]), so liefert dies die funktionalanalytische Grundlage für die Lösungsdarstellung von  $\underline{u}(t)$  als Entwicklung bezüglich des Störungsparameters  $\eta$ :

$$\underline{u}(t) = \sum_{k=0}^{\bar{k}} {}^k \underline{u}(t) \eta^k + o(\eta^{\bar{k}}), \quad \eta \rightarrow 0 \quad (3.3)$$

mit Vektorfunktionen  ${}^k \underline{u}(t) = ({}^k u_j(t))_{j \in \chi_h}^\top$ ,  $k = 0, 1, \dots, \bar{k}$ ,  $\bar{k} \in \mathbf{N}_0$ . Das Einsetzen dieser Darstellung in die Anfangswertaufgabe (3.2) führt mittels Koeffizientenvergleich bei  $\eta^k$ ,  $k = 0, 1, \dots, \bar{k}$ , auf Systeme

$$M {}^0 \underline{u}(t) + \widehat{K} {}^0 \underline{u}(t) = \underline{f}(t) \quad \text{mit AB} \quad M {}^0 \underline{u}(0) = \underline{d} \quad (3.4)$$

$$\text{und für } 1 \leq k \leq \bar{k}: \quad M {}^k \underline{u}(t) + \widehat{K} {}^k \underline{u}(t) = -\widetilde{K} {}^{k-1} \underline{u}(t) \quad \text{mit AB} \quad M {}^k \underline{u}(0) = 0. \quad (3.5)$$

Für  $k = 0$  ergibt sich ein rein deterministisches System, dessen Lösung  ${}^0 \underline{u}(t)$  gerade die approximative Lösung des so genannten gemittelten Problems ist. Das gemittelte Problem erhält man, indem man im Ausgangsproblem alle zufälligen Größen durch ihre Erwartungswerte ersetzt. Die Lösung lässt sich einerseits explizit darstellen als

$${}^0 \underline{u}(t) = G(t) \underline{d} + \int_0^t G(t-s) \underline{f}(s) \, ds, \quad (3.6)$$

wobei  $G(t) = \exp(-M^{-1} \widehat{K} t) M^{-1}$ .

Andererseits können zur Bestimmung von  ${}^0\underline{u}(t)$  Standardalgorithmen zur Lösung von Systemen gewöhnlicher Differentialgleichungen (etwa das Crank-Nicolson-Verfahren) eingesetzt werden. Bei der Untersuchung von Gliedern höherer Ordnung kann  ${}^0\underline{u}(t)$  demzufolge als gegeben vorausgesetzt werden. Die Existenz und Eindeutigkeit von  ${}^0\underline{u}(t)$  ist zudem Voraussetzung des verallgemeinerten Satzes über implizite Funktionen.

Erinnert sei an den Aufbau des Lastvektors mit

$$\begin{aligned} \underline{f}(t) &= \left( \langle F(t), p_i \rangle \right)_{i \in \chi_h}^\top \\ &= \left( \int_{\mathfrak{D}} f(x, t) p_i(x) dx + \int_{\Gamma_2} g_2(x, t) p_i(x) ds + \int_{\Gamma_3} \alpha(x) u_A(x, t) p_i(x) ds \right)_{i \in \chi_h}^\top. \end{aligned}$$

Damit unterliegt das System für  $k = 0$  nur dann stochastischen Einflüssen, wenn  $f$  (Wärmequellen oder -senken in  $\mathfrak{D}$ ),  $g_2$  (Wärmeeinstrom auf  $\Gamma_2$ ) oder  $u_A$  (Außentemperatur am Rand  $\Gamma_3$ ) zufallsabhängig sind.

Die Systeme für  $1 \leq k \leq \bar{k}$  weisen jeweils eine stochastische rechte Seite auf, während die ursprünglich zufällige Systemmatrix deterministisch ist. Für diese Art von Anfangswertaufgaben existieren bereits effiziente Verfahren, um stochastische Charakteristiken der Lösung zu berechnen (vgl. z. B. [4]). Zudem können die Anfangsbedingungen in (3.5) durch die Beziehungen  ${}^k\underline{u}(0) = 0$  ersetzt werden, da die Massematrix  $M$  symmetrisch positiv definit und damit invertierbar ist. Demzufolge gilt für die Entwicklungsglieder

$$\begin{aligned} {}^k\underline{u}(t, \omega) &= - \int_0^t G(t-s) \tilde{K}(\omega) {}^{k-1}\underline{u}(s, \omega) ds \\ &= \int_{\mathfrak{D}} \lambda_1(x, \omega) {}^k\underline{H}(x, t, \omega) dx \end{aligned} \quad (3.7)$$

mit

$${}^kH_i(x, t, \omega) = - \int_0^t \sum_{j \in \chi_h} G_{ij}(t-s) (\nabla p_j(x))^\top \nabla {}^{k-1}u_h(x, s, \omega) ds. \quad (3.8)$$

Unter  $\nabla {}^k u_h$  ist der  $x$ -Gradient des  $k$ -ten Entwicklungsglieds der approximativen Lösung  $u_h$  zu verstehen, d. h.

$$\nabla {}^k u_h(x, t, \omega) = \nabla \sum_{i \in \chi_h} {}^k u_i(t, \omega) p_i(x) = \sum_{i \in \chi_h} {}^k u_i(t, \omega) \nabla p_i(x).$$

Wir werden das Augenmerk im Weiteren auf die Berechnung von  ${}^1\underline{u}$  und  ${}^2\underline{u}$  richten. Für  $k = 1$  ergibt sich die Lösung als vektorwertiges Integral über das betrachtete Gebiet  $\mathfrak{D}$  mit deterministischer Kernfunktion zu

$${}^1\underline{u}(t, \omega) = \int_{\mathfrak{D}} \lambda_1(x, \omega) \underline{H}(x, t) dx = (\lambda_1(\cdot, \omega), \underline{H}(\cdot, t))_0 \quad (3.9)$$

$$\text{mit } \underline{H}(x, t) := {}^1\underline{H}(x, t, \omega)$$

$$\text{und } H_i(x, t) = - \int_0^t \sum_{j \in \chi_h} G_{ij}(t-s) (\nabla p_j(x))^\top \sum_{a \in \chi_h} {}^0 u_a(s) \nabla p_a(x) ds \quad (3.10)$$

Schreibt man die Lösung für  $k = 2$  ausgehend von (3.7) um, erhält man das Doppelintegral

$$\underline{u}(t, \omega) = \int_{\mathfrak{D}} \int_{\mathfrak{D}} \lambda_1(x, \omega) \lambda_1(y, \omega) \underline{L}(x, y, t) \, dx \, dy \quad (3.11)$$

$$\text{mit } \underline{L}(x, y, t) = (L_i(x, y, t))_{i \in \chi_h}^\top,$$

$$\text{wobei } L_i(x, y, t) = - \int_0^t \sum_{j \in \chi_h} G_{ij}(t-s) (\nabla p_j(x))^\top \sum_{a \in \chi_h} \nabla p_a(x) H_a(y, s) \, ds.$$

## 4 Entwicklung von Erwartungswert- und Korrelationsfunktion

Die Entwicklung des gesuchten Vektors von Koeffizientenfunktionen  $\underline{u}(t)$  ermöglicht die genäherte Berechnung von Erwartungswert- und Korrelationsfunktion der approximativen Lösung  $u_h(x, t, \omega) = \sum_{j \in \chi_h} u_j(t, \omega) p_j(x)$ . Die Entwicklung werde jeweils bis zu Gliedern zweiter Ordnung vorgenommen. Die Struktur von höheren Entwicklungsgliedern erweist sich für konkrete Berechnungen als recht kompliziert.

### 4.1 Erwartungswertfunktion

Es gilt

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \underline{u}(t) &= {}^0\underline{u}(t) + \mathbf{E} {}^2\underline{u}(t) \eta^2 + o(\eta^2), \quad \eta \rightarrow 0, \\ \text{da } \mathbf{E} {}^1\underline{u}(t) &= \mathbf{E} \{(\lambda_1, \underline{H}(\cdot, t))_0\} = (\mathbf{E} \lambda_1, \underline{H}(\cdot, t))_0 = 0. \end{aligned}$$

Für den Term zweiter Ordnung findet man gemäß (3.11)

$$\begin{aligned} \mathbf{E} {}^2\underline{u}(t) &= \mathbf{E} \left\{ \int_{\mathfrak{D}} \int_{\mathfrak{D}} \lambda_1(x) \lambda_1(y) \underline{L}(x, y, t) \, dx \, dy \right\} \\ &= \int_{\mathfrak{D}} \int_{\mathfrak{D}} \mathbf{E} \{ \lambda_1(x) \lambda_1(y) \} \underline{L}(x, y, t) \, dx \, dy \\ &= \int_{\mathfrak{D}} \int_{\mathfrak{D}} R_{\lambda_1 \lambda_1}(x, y) \underline{L}(x, y, t) \, dx \, dy, \end{aligned}$$

wobei  $R_{\lambda_1 \lambda_1}(x, y) = \mathbf{E} \{ \lambda_1(x) \lambda_1(y) \}$  die gegebene Korrelationsfunktion des zentrierten zufälligen Feldes  $\lambda_1(x, \omega)$  darstellt.

Der Erwartungswert der approximativen Lösung  $u_h$  ist somit gegeben durch

$$\mathbf{E} u_h(x, t) = \sum_{j \in \chi_h} ({}^0u_j(t) + \mathbf{E} {}^2u_j(t) \eta^2) p_j(x) + o(\eta^2), \quad \eta \rightarrow 0. \quad (4.1)$$

Für praktische Fragestellungen ist es meist ausreichend, die stochastischen Charakteristiken nur an Knotenpunkten  $P_i$  der Vernetzung mit den Koordinaten  $x^i$  zu ermitteln. Dort gilt wegen  $p_j(x^i) = \delta_{ij}$

$$\mathbf{E}u_h(x^i, t) = {}^0u_i(t) + \mathbf{E} {}^2u_i(t) \eta^2 + o(\eta^2), \quad \eta \rightarrow 0.$$

Aus diesen Darstellungen ist ersichtlich, dass sich der Erwartungswert der Lösung von der Lösung des gemittelten Problems (vgl. (3.6)) unterscheidet. Die Berechnung der Differenz zwischen dem Erwartungswert der Lösung und der Lösung des gemittelten Problems wird oft als „Mittelungsproblem“ bezeichnet. Diese Differenz ist wesentlich durch  $\mathbf{E} {}^2u(t)$  bestimmt. Sie ist kennzeichnend für Aufgaben der Stochastischen Analysis, bei denen, wie in diesem Fall, die Zufälligkeit aus Koeffizienten auf der linken Seite der Differentialgleichung, d. h. aus dem Differentialoperator selbst, hervorgeht (vgl. auch [7]).

## 4.2 Korrelationsfunktion

Wir betrachten zunächst die Korrelationsfunktion von  $\underline{u}(t)$  und entwickeln wiederum bis zur Ordnung  $k = 2$ . Es ist

$$\underline{u}(t) - \mathbf{E}\underline{u}(t) = {}^1\underline{u}(t)\eta + [{}^2\underline{u}(t) - \mathbf{E} {}^2\underline{u}(t)]\eta^2 + o(\eta^2), \quad \eta \rightarrow 0,$$

woraus man mit

$$\begin{aligned} R_{\underline{u}\underline{u}}(t_1, t_2) &:= \mathbf{E} \left\{ [\underline{u}(t_1) - \mathbf{E}\underline{u}(t_1)] [\underline{u}(t_2) - \mathbf{E}\underline{u}(t_2)]^\top \right\} \\ &= \mathbf{E} \left\{ {}^1\underline{u}(t_1) {}^1\underline{u}^\top(t_2) \right\} \eta^2 + o(\eta^2), \quad \eta \rightarrow 0, \end{aligned} \quad (4.2)$$

die matrixwertige Korrelationsfunktion von  $\underline{u}$  zu den Zeitpunkten  $t_1$  und  $t_2$  erhält. Nach (3.9) liegt das Hauptproblem nun in der Berechnung von

$$\mathbf{E} \left\{ {}^1\underline{u}(t_1) {}^1\underline{u}^\top(t_2) \right\} = \int_{\mathfrak{D}} \int_{\mathfrak{D}} R_{\lambda_1 \lambda_1}(x, y) \underline{H}(x, t_1) \underline{H}^\top(y, t_2) dx dy. \quad (4.3)$$

Der Übergang zur gesuchten Funktion  $u_h$  liefert schließlich

$$\begin{aligned} R_{u_h u_h}((x, t_1), (y, t_2)) &:= \mathbf{E} \left\{ [u_h(x, t_1) - \mathbf{E}u_h(x, t_1)] [u_h(y, t_2) - \mathbf{E}u_h(y, t_2)] \right\} \\ &= \sum_{i, j \in \chi_h} \mathbf{E} \left\{ {}^1u_i(t_1) {}^1u_j(t_2) \right\} p_i(x) p_j(y) \eta^2 + o(\eta^2), \quad \eta \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Das  $\eta^2$ -fache des Eintrags in der  $i$ -ten Zeile und  $j$ -ten Spalte der Korrelationsmatrix  $\mathbf{E} \left\{ {}^1\underline{u}(t_1) {}^1\underline{u}^\top(t_2) \right\}$  entspricht somit näherungsweise der Korrelation der Lösung zwischen zwei Knotenpunkten  $P_i$  und  $P_j$  zu Zeitpunkten  $t_1$  und  $t_2$ , d. h.

$$R_{u_h u_h}((x^i, t_1), (x^j, t_2)) = \mathbf{E} \left\{ {}^1u_i(t_1) {}^1u_j(t_2) \right\} \eta^2 + o(\eta^2), \quad \eta \rightarrow 0. \quad (4.5)$$

Für die Varianz gilt

$$\mathbf{D}^2\{u_h(x^i, t)\} = \mathbf{E} \left\{ [{}^1u_i(t)]^2 \right\} \eta^2 + o(\eta^2), \quad \eta \rightarrow 0. \quad (4.6)$$



## 5 Korrelationsfunktion im eindimensionalen Fall

### 5.1 $\lambda$ als zufällige Funktion

Die Erkenntnisse zur Berechnung von Korrelations- und Varianzfunktion sollen nun auf das folgende eindimensionale Wärmeleitproblem angewandt werden: Gesucht ist die Temperaturverteilung in einem Stab  $u : [0, l] \times [0, T] \times \Omega \rightarrow \mathbf{R}$ , für welche die Differentialgleichung

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda(x, \omega) \frac{\partial u}{\partial x} \right) = 0 \quad \text{für } (x, t) \in (0, l) \times (0, T],$$

die Randbedingungen

$$\begin{aligned} -\lambda(x, \omega) \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=0} &= g_2 \quad \text{für } t \in (0, T] \text{ und} \\ \left[ \lambda(x, \omega) \frac{\partial u}{\partial x} + \alpha(u(x, t) - u_A) \right]_{x=l} &= 0 \quad \text{für } t \in (0, T] \end{aligned} \quad (5.1)$$

sowie die Anfangsbedingung  $u(x, 0) = u_0$  für  $x \in [0, l]$

erfüllt sind.

Im eindimensionalen Fall werden die FE-Ansatzfunktionen  $p_i(x), i = 1, \dots, N_h$ , als die so genannten „Hütchenfunktionen“ gesetzt, d. h. diese haben bei einer gleichmäßigen (äquidistanten) Vernetzung die Gestalt (vgl. Abb. 5.1)

$$\begin{aligned} p_1(x) &= \begin{cases} 1 - \frac{x}{h} & x \in [0, h] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}, \\ p_j(x) &= \begin{cases} 1 + \frac{1}{h}(x - (j-1)h) & x \in [(j-2)h, (j-1)h] \\ 1 - \frac{1}{h}(x - (j-1)h) & x \in [(j-1)h, jh] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad \text{für } j = 2, \dots, N_h - 1, \\ \text{und} & \end{aligned} \quad (5.2)$$

$$p_{N_h}(x) = \begin{cases} 1 + \frac{1}{h}(x - l) & x \in [l-h, l] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

Die Entwicklung der Korrelationsfunktion  $R_{uu}$  basiert nach (4.2) auf der Berechnung der Matrix  $\mathbf{E}\{\underline{u}(t_1)\underline{u}^\top(t_2)\}$ . Elementweise lässt sich mit (4.3) schreiben

$$\mathbf{E}\{u_i(t_1)u_j(t_2)\} = \int_0^l \int_0^l R_{\lambda_1 \lambda_1}(v, w) H_i(v, t_1) H_j(w, t_2) dv dw. \quad (5.3)$$

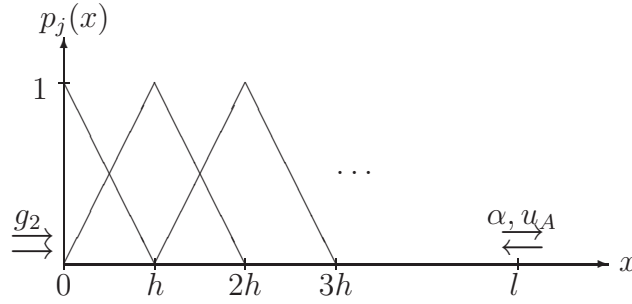


Abbildung 5.1: Ansatzfunktionen im 1-D-Fall

Auf den finiten Elementen  $T^{(r)} = ((r-1)h, rh)$ ,  $r \in \varrho_h = \{1, \dots, R_h\}$ ,  $R_h = N_h - 1$ , sind die Kernfunktionen  $H_i(x, t)$  (bzgl.  $x$ ) konstant, denn für sie gilt nach (3.10)

$$H_i(x, t) = - \int_0^t \sum_{j=1}^{N_h} G_{ij}(t-s) p'_j(x) \sum_{a=1}^{N_h} p'_a(x) {}^0u_a(s) ds$$

und damit bei Verwendung der Ansatzfunktionen aus (5.2) für  $x \in T^{(r)}$ ,  $r = 1, \dots, R_h$ ,

$$H_i(x, t) = - \frac{1}{h^2} \int_0^t [G_{i,r+1}(t-s) - G_{ir}(t-s)] [{}^0u_{r+1}(s) - {}^0u_r(s)] ds, \quad (5.4)$$

so dass wir setzen können

$$\begin{aligned} H_{i,r}(t) &:= H_i(x, t) \quad \text{für } x \in T^{(r)}, r = 1, \dots, R_h, \\ \text{d. h.} \quad H_i(x, t) &= \sum_{r=1}^{R_h} H_{i,r}(t) \mathbf{1}_{T^{(r)}}(x). \end{aligned} \quad (5.5)$$

Es gilt also zunächst

$$\mathbf{E}\{{}^1u_i(t_1){}^1u_j(t_2)\} = \sum_{r_1=1}^{R_h} \sum_{r_2=1}^{R_h} H_{i,r_1}(t_1) H_{j,r_2}(t_2) I_{r_1,r_2} \quad (5.6)$$

$$\text{mit } I_{r_1,r_2} := \int_{T^{(r_1)}} \int_{T^{(r_2)}} R_{\lambda_1 \lambda_1}(v, w) dv dw. \quad (5.7)$$

Beschränkt man sich auf schwach stationäre zufällige Funktionen  $\lambda_1(x, \omega)$ , d. h. auf Funktionen, für die  $R_{\lambda_1 \lambda_1}(x, y) = R_{\lambda_1 \lambda_1}(y - x) = R_{\lambda_1 \lambda_1}(x - y)$  gilt, so lässt sich zeigen, dass die Integrale  $I_{r_1,r_2}$  nur von

$$q := |r_1 - r_2| \quad (5.8)$$

abhängen. Dies ist Inhalt des folgenden Lemmas.

**Lemma 5.1**

Es sei  $\lambda_1(x, \omega)$  eine schwach stationäre zufällige Funktion. Dann gilt für  $r_1, r_2 = 1, \dots, R_h$

$$I_{r_1, r_2} = I_{r_2, r_1} = I_{1, 1+q} =: I_q. \quad (5.9)$$

**Beweis.**

Sei o.B.d.A.  $r_2 \geq r_1$  und damit  $q = r_2 - r_1$ . Wir setzen  $r := r_1$ . Mit den Substitutionen  $v' = v - (r-1)h$  und  $w' = w - (r-1)h$  gilt

$$\begin{aligned} I_{r_1, r_2} &= I_{r, r+q} \\ &= \int_{(r-1)h}^{rh} \int_{(r+q-1)h}^{(r+q)h} R_{\lambda_1 \lambda_1}(w-v) dv dw = \int_0^h \int_{qh}^{(q+1)h} R_{\lambda_1 \lambda_1}(w'-v') dv' dw' = I_{1, 1+q}. \end{aligned}$$

Weiterhin ist mit  $v' = w$  und  $w' = v$  wegen  $R_{\lambda_1 \lambda_1}(\tau) = R_{\lambda_1 \lambda_1}(-\tau)$

$$I_{r_1, r_2} = I_{r, r+q} = \int_{(r+q-1)h}^{(r+q)h} \int_{(r-1)h}^{rh} R_{\lambda_1 \lambda_1}(w'-v') dv' dw' = I_{r+q, r} = I_{r_2, r_1}.$$

□

Wählt man  $\lambda_1(x, \omega)$  als  $\varepsilon$ -korrelierte zufällige Funktion, beispielsweise mit der Korrelationsfunktion

$$R_{\lambda_1 \lambda_1}(x, y) = R_{\lambda_1 \lambda_1}(y-x) = \begin{cases} \sigma^2 \left(1 - \frac{|y-x|}{\varepsilon}\right) & |y-x| \leq \varepsilon \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}, \quad (5.10)$$

so reduziert sich das Integrationsgebiet in (5.3) auf den Streifen

$$I_\varepsilon = \{(x, y) \in [0, l]^2 : |x-y| \leq \varepsilon\}$$

(vgl. Abb. 5.2). Um die Berechnungen zu vereinfachen, wird angenommen, dass die Korrelationslänge  $\varepsilon$  einem ganzzahligen Vielfachen des Diskretisierungsparameters  $h$  entspricht, d. h.  $\varepsilon = mh$ . Bei der Summation bzw. Integration in (5.6) bzw. (5.7) sind somit nur finite Elemente  $T^{(r_1)}$  und  $T^{(r_2)}$  zu berücksichtigen, für welche  $(T^{(r_1)} \times T^{(r_2)}) \cap I_\varepsilon \neq \emptyset$  gilt. Dies ist äquivalent zur Bedingung  $q = |r_1 - r_2| \leq m$ . Wir erhalten

$$\mathbf{E}\{^1u_i(t_1)^1u_j(t_2)\} = \sum_{\substack{r_1, r_2=1 \\ |r_1-r_2| \leq m}}^{R_h} H_{i, r_1}(t_1) H_{j, r_2}(t_2) I_{r_1, r_2}. \quad (5.11)$$

Zum einen kann die Summation in die Fälle  $1 \leq r_1 \leq m$ ,  $m+1 \leq r_1 \leq R_h - m$  und  $R_h - m + 1 \leq r_1 \leq R_h$  (vgl. Abb. 5.2) aufgeteilt werden, d. h. es gilt

$$\sum_{\substack{r_1, r_2=1 \\ |r_1-r_2| \leq m}}^{R_h} (\dots) = \sum_{r_1=1}^m \sum_{r_2=1}^{r_1+m} (\dots) + \sum_{r_1=m+1}^{R_h-m} \sum_{r_2=r_1-m}^{r_1+m} (\dots) + \sum_{r_1=R_h-m+1}^{R_h} \sum_{r_2=r_1-m}^{R_h} (\dots).$$

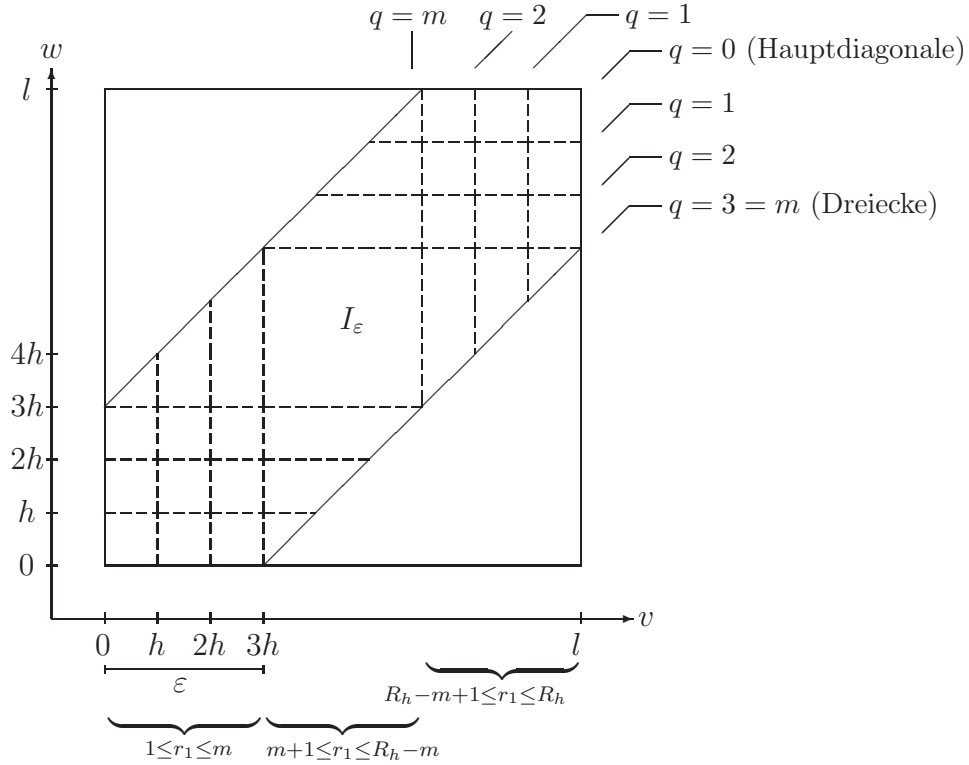


Abbildung 5.2: Integrationsgebiet zur Berechnung von  $\mathbf{E}\{^1u_i(t_1)^1u_j(t_2)\}$  bei  $m = 3$

Zum anderen bietet sich die Möglichkeit, jeweils über die Hauptdiagonale ( $q = 0$ ) und die Nebendiagonalen ( $1 \leq q \leq m$ ) von  $I_\epsilon$  zu summieren. Dazu schreiben wir die Menge an Elementnummern-Paaren, welche die Bedingung  $q \leq m$  erfüllen, wie folgt um

$$\begin{aligned} \{(r_1, r_2) \in \varrho_h^2 : q = |r_1 - r_2| \leq m\} &= \{(r, r') \in \varrho_h^2 : r = r'\} \\ &\quad \text{(Hauptdiagonale)} \\ &\cup \{(r, r') \in \varrho_h^2 : r' = r + q, 1 \leq q \leq m\} \\ &\quad \text{(obere Nebendiagonalen)} \\ &\cup \{(r', r) \in \varrho_h^2 : r' = r + q, 1 \leq q \leq m\}. \\ &\quad \text{(untere Nebendiagonalen)} \end{aligned}$$

Nach Lemma 5.1 sind die Integrale  $I_{r_1, r_2}$  nur von  $q$  abhängig und damit auf den oberen und unteren Nebendiagonalen für festes  $q$  gleich, so dass sich für die Elemente der gesuchten Korrelationsmatrix nach der zweiten Summationsmethode ergibt

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\{^1u_i(t_1)^1u_j(t_2)\} &= I_0 \sum_{r=1}^{R_h} H_{i,r}(t_1) H_{j,r}(t_2) \\ &\quad + \sum_{q=1}^m I_q \sum_{r=1}^{R_h-q} [H_{i,r}(t_1) H_{j,r+q}(t_2) + H_{i,r+q}(t_1) H_{j,r}(t_2)]. \end{aligned} \quad (5.12)$$

Die Integrale  $I_q$  können bei Verwendung der Korrelationsfunktion (5.10) analytisch aus-

gewertet werden. Dabei sind

$$\begin{aligned}
 I_0 &= \int_0^h \int_0^h \sigma^2 \left(1 - \frac{|w-v|}{mh}\right) dv dw = \left(1 - \frac{1}{3m}\right) \sigma^2 h^2, \\
 I_q &= \int_0^h \int_{qh}^{(q+1)h} \sigma^2 \left(1 - \frac{|w-v|}{mh}\right) dv dw = \left(1 - \frac{q}{m}\right) \sigma^2 h^2, \quad q = 1, \dots, m-1, \quad \text{und} \\
 I_m &= \int_0^h \int_{mh}^{mh+v} \sigma^2 \left(1 - \frac{|w-v|}{mh}\right) dv dw = \frac{1}{6m} \sigma^2 h^2.
 \end{aligned}$$

Zu beachten ist, dass bei  $I_m$  über das Dreiecksgebiet  $(T^{(1)} \times T^{(1+m)}) \cap I_\varepsilon$  integriert wird. Über die Zusammenhänge (4.4), (4.5) und (4.6) erhält man schließlich Näherungen für die Korrelations- bzw. Varianzfunktion der gesuchten approximativen Lösung  $u_h$  des Wärmeleitproblems (5.1) zwischen bzw. an Knotenpunkten der FE-Vernetzung. Aus (5.12) folgt für die Varianzfunktion

$$\mathbf{D}^2\{u_h(x^i, t)\} \approx \eta^2 \left[ I_0 \sum_{r=1}^{R_h} H_{i,r}^2(t) + 2 \sum_{q=1}^m I_q \sum_{r=1}^{R_h-q} H_{i,r}(t) H_{i,r+q}(t) \right]. \quad (5.13)$$

**Beispiel 5.2** Für  $m = 2$  und mit der Korrelationsfunktion (5.10) erhalten wir

$$\begin{aligned}
 \mathbf{E}\{^1u_i(t_1)^1u_j(t_2)\} &= \sigma^2 \left\{ \frac{5}{6} \sum_{r=1}^{R_h} \tilde{H}_{ij}(r, 0, t_1, t_2) \right. \\
 &\quad + \frac{1}{2} \sum_{r=1}^{R_h-1} [\tilde{H}_{ij}(r, 1, t_1, t_2) + \tilde{H}_{ij}(r+1, -1, t_1, t_2)] \\
 &\quad \left. + \frac{1}{12} \sum_{r=1}^{R_h-2} [\tilde{H}_{ij}(r, 2, t_1, t_2) + \tilde{H}_{ij}(r+2, -2, t_1, t_2)] \right\},
 \end{aligned}$$

wobei  $\tilde{H}_{ij}(r, \tilde{q}, t_1, t_2) := h^2 H_{i,r}(t_1) H_{j,r+\tilde{q}}(t_2)$ ,  $|\tilde{q}| = 0, 1, 2$ , gesetzt wurde.

Man findet für die Varianz an Knotenpunkten  $P_i$

$$\mathbf{D}^2\{u_h(x^i, t)\} \approx \eta^2 \sigma^2 \left[ \frac{5}{6} \sum_{r=1}^{R_h} \tilde{H}_{ii}(r, 0, t, t) + \sum_{r=1}^{R_h-1} \tilde{H}_{ii}(r, 1, t, t) + \frac{1}{6} \sum_{r=1}^{R_h-2} \tilde{H}_{ii}(r, 2, t, t) \right].$$

**Bemerkung 5.3** Die Matrixexponentialfunktion  $G(t) = \exp(-M^{-1}\hat{K}t)M^{-1}$  kann ohne direkte Berechnung von  $M^{-1}$  ausgewertet werden. Da  $\hat{K}$  und  $M$  symmetrisch sind und  $M$  positiv definit ist, existieren nach [5] zu dem verallgemeinerten Eigenwertproblem

$$\hat{K}x = dMx$$

Matrizen  $V$  (Eigenvektoren) und  $D = \text{diag}(d_1, \dots, d_{N_h})$  (Eigenwerte), so dass gilt

$$V^\top \hat{K} V = D \quad \text{und} \quad V^\top M V = I$$

und damit

$$M^{-1} = V V^\top \quad \text{und} \quad M^{-1} \hat{K} = V V^\top V^{-\top} D V^{-1} = V D V^{-1}.$$

Infolgedessen erleichtert sich die Berechnung der Matrixexponentialfunktion  $G(t)$  zu

$$G(t) = \exp(-V D V^{-1} t) V V^\top = V \exp(-D t) V^\top.$$

#### Beispiel 5.4 (Numerisches Beispiel)

Die Abbildungen 5.3 und 5.4 zeigen die mittels (5.13) berechnete Varianz der Lösung des 1D-Wärmeleitproblems mit folgenden Eingangsparametern

$$\begin{array}{llll} l = 1 & T = 0.02 & u_0 = 290 & u_A = 286 \\ g_2 = 0.2 & \alpha = 2.4 & \lambda_0 = 2 & \sigma^2 = 0.05 \end{array}.$$

Als Diskretisierungsparameter wurde in Ortsrichtung  $h = 0.025$ , d. h.  $N_h = 41$ , gewählt. Die Varianzfunktion wurde für  $\varepsilon = h$  und für  $\varepsilon = 2h$  berechnet. Weiterhin sind in den Abbildungen 5.5 und 5.6 zwei Varianzfunktionen angegeben, die unter Verwendung der Monte-Carlo-Simulation berechnet wurden. Problematisch erscheint die Vergleichbarkeit mit den Resultaten aus der Entwicklung, da die Korrelationsfunktion des simulierten zufälligen Feldes  $\lambda(x, \omega)$  in diesem Beispiel nicht an die vorgegebene Korrelationsfunktion (5.10) angepasst wurde.

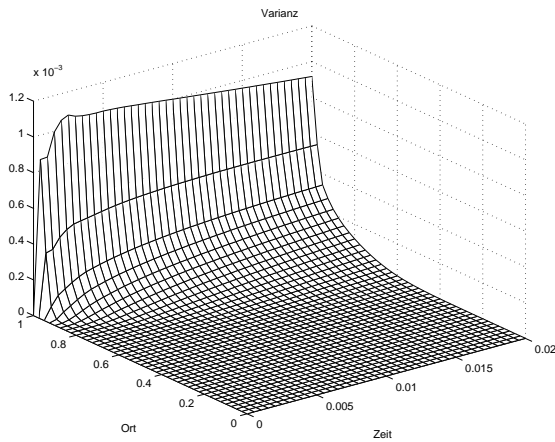


Abbildung 5.3: Über Entwicklung berechnete Varianzfunktion für  $\varepsilon = h$

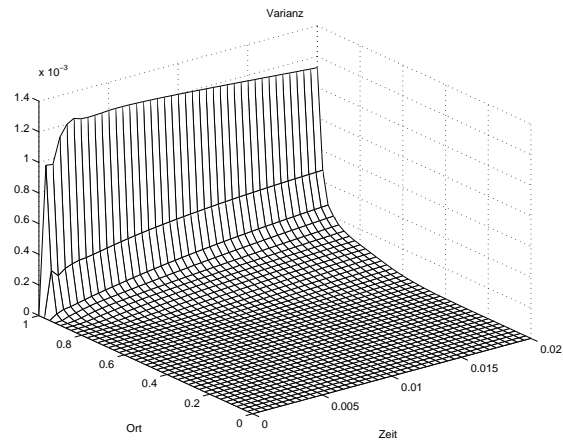
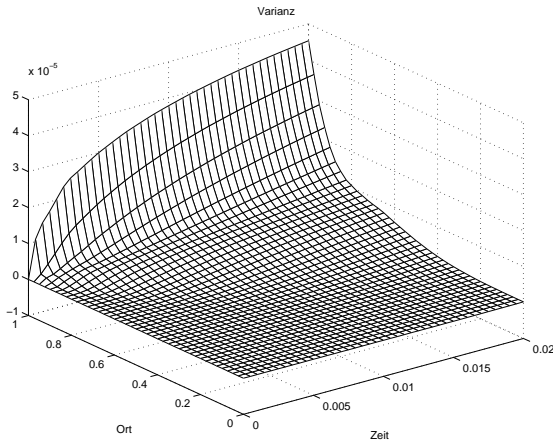
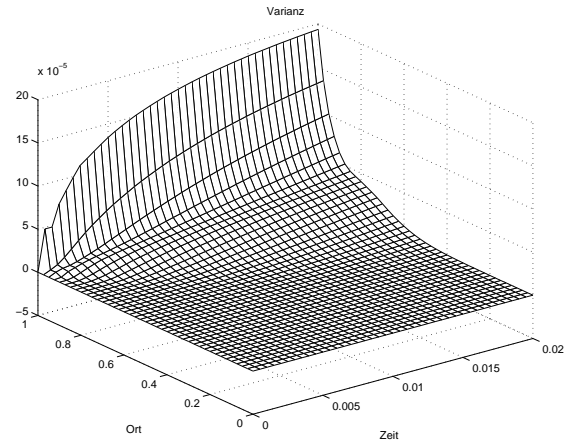


Abbildung 5.4: Über Entwicklung berechnete Varianzfunktion für  $\varepsilon = 2h$

Abbildung 5.5: Mit Simulation berechnete Varianzfunktion für  $\varepsilon = h$ Abbildung 5.6: Mit Simulation berechnete Varianzfunktion für  $\varepsilon = 2h$ 

## 5.2 $\lambda$ als Zufallsgröße

Bereits in [2] wurden Ergebnisse für die Wärmeleitung mit einem zufälligen, ortsunabhängigen Koeffizienten im eindimensionalen Medium präsentiert. Konkrete Berechnungen ergaben sich ausgehend von der Entwicklung bzw. Simulation der Fourier-Lösung der partiellen Differentialgleichung. Im Folgenden soll kurz auf die Lösung dieses Problems mittels der Entwicklung der Lösung  $\underline{u}(t)$  des FE-Systems (2.4) eingegangen werden.

Es werde wie im vorangegangenen Abschnitt der einfachste Fall eines konstanten Wärmeflusses  $g_2$  an  $\Gamma_2 = \{0\}$  und einer konstanten Umgebungstemperatur  $u_A$  an  $\Gamma_3 = \{l\}$  betrachtet. Die Entwicklung gestaltet sich in dem Fall, dass  $\lambda$  zwar zufällig, aber auf dem gesamten Stab konstant ist, d. h.

$$\lambda(\omega) = \lambda_0 + \eta\lambda_1(\omega) \quad \text{mit } \mathbf{E}\lambda_1 = 0, \quad (5.14)$$

einfacher als für den Fall eines zufälligen Feldes bzw. einer zufälligen Funktion. Zum einen ließe sich der Ansatz aus (5.3) und (5.6) hierauf übertragen. Dabei müsste man lediglich

$$R_{\lambda_1\lambda_1}(x, y) = \sigma^2 \quad \text{mit } \sigma^2 = \mathbf{E}\lambda_1^2$$

setzen. Weiterhin wäre zu beachten, dass sich die Integration über das gesamte Gebiet  $[0, l]^2$  erstreckt, so dass man ausgehend von (5.11) erhält

$$\mathbf{E}\{^1u_i(t_1)^1u_j(t_2)\} = \sigma^2 \sum_{r_1, r_2=1}^{R_h} H_{i,r_1}(t_1)H_{j,r_2}(t_2). \quad (5.15)$$

Zum anderen kann die Lösung  $\underline{u}(t)$  von (2.4) direkt bezüglich  $\eta$  entwickelt werden. Es muss dabei nicht, wie in Abschnitt 3, ein Koeffizientenvergleich durchgeführt werden, um die Entwicklungsglieder  $^k\underline{u}(t)$  zu bestimmen.

Da  $g_2$ ,  $u_A$  und  $\alpha$  als konstant vorausgesetzt wurden, ist der Lastvektor  $\underline{f}$  zeitunabhängig und wir erhalten realisierungsweise für die Lösung  $\underline{u}(t)$

$$\underline{u}(t, \omega) = G(t, \omega) \underline{d} + \int_0^t G(t-s, \omega) \underline{f} \, ds = G(t, \omega) \underline{d} + \int_0^t G(s, \omega) \, ds \underline{f}$$

$$\text{mit } G(t, \omega) = \exp(-M^{-1}K(\omega)t)M^{-1}.$$

Man entwickelt nun die Matrixexponentialfunktion bezüglich  $\eta$  und es gilt

$$G(t, \omega) = \exp(-M^{-1}\eta\lambda_1(\omega)K_1t)G_0(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (-M^{-1}K_1)^k t^k (\lambda_1(\omega))^k \eta^k G_0(t),$$

wobei

$$G_0(t) = \exp(-M^{-1}[\lambda_0 K_1 + K_2]t)M^{-1}$$

und eine Aufteilung der Steifigkeitsmatrix in

$$K(\omega) = \lambda(\omega)K_1 + K_2$$

$$\text{mit } K_1 = \left( \int_0^l p'_i(x) p'_j(x) \, dx \right)_{i,j \in \chi_h}$$

$$\text{und } K_2 = (\alpha p_i(l) p_j(l))_{i,j \in \chi_h}$$

gegeben sind. Für  $\underline{u}(t)$  erhalten wir damit die Entwicklung

$$\underline{u}(t, \omega) = \sum_{k=0}^{\bar{k}} {}^k \underline{u}(t) (\lambda_1(\omega))^k \eta^k + o(\eta^{\bar{k}}), \quad \eta \rightarrow 0$$

$$\text{mit } {}^k \underline{u}(t) = \frac{1}{k!} (-M^{-1}K_1)^k \left[ t^k G_0(t) \underline{d} + \int_0^t s^k G_0(s) \, ds \underline{f} \right].$$

Setzt man  $\widehat{K} := \lambda_0 K_1 + K_2$ , so ist in dieser Schreibweise Bemerkung 5.3 anwendbar. Danach lässt sich  $G_0(t)$  über die Eigenwertzerlegung  $M^{-1}\widehat{K} = VDV^{-1}$  und  $M^{-1} = VV^{\top}$  darstellen als

$$G_0(t) = V \exp(-Dt) V^{\top}.$$

Es gilt somit für die Entwicklungsglieder  ${}^k \underline{u}(t)$

$$\begin{aligned} {}^k \underline{u}(t) &= \frac{1}{k!} (-M^{-1}K_1)^k V \left[ t^k \exp(-Dt) V^{\top} \underline{d} + I_k(t) V^{\top} \underline{f} \right] \\ \text{mit } I_k(t) &:= \int_0^t s^k \exp(-Ds) \, ds \\ &= k! D^{-1} \left[ D^{-k} - \sum_{\nu=0}^k \frac{t^{k-\nu}}{(k-\nu)!} D^{-\nu} \exp(-Dt) \right]. \end{aligned} \tag{5.16}$$



Auf Basis dieser Entwicklung finden wir für die Erwartungswert- und Korrelationsfunktion des Vektors  $\underline{u}(t)$  bzw. der approximierenden Lösung  $u_h(t)$

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\underline{u}(t) &= {}^0\underline{u}(t) + {}^2\underline{u}(t)\mathbf{E}\lambda_1^2\eta^2 + o(\eta^2), \quad \eta \rightarrow 0, \quad \text{bzw.} \\ \mathbf{E}u_h(x, t) &= \sum_{i=1}^{N_h} ({}^0u_i(t) + {}^2u_i(t)\mathbf{E}\lambda_1^2\eta^2) p_i(x) + o(\eta), \quad \eta \rightarrow 0, \end{aligned} \quad (5.17)$$

und

$$\begin{aligned} R_{\underline{u}\underline{u}}(t_1, t_2) &= {}^1\underline{u}(t_1) {}^1\underline{u}^\top(t_2)\mathbf{E}\lambda_1^2\eta^2 + o(\eta^2), \quad \eta \rightarrow 0, \quad \text{bzw.} \\ R_{u_h u_h}((x_1, t_1), (x_2, t_2)) &= \sum_{i,j=1}^{N_h} {}^1u_i(t_1) {}^1u_j(t_2) p_i(x_1) p_j(x_2) \mathbf{E}\lambda_1^2\eta^2 + o(\eta^2), \quad \eta \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (5.18)$$

## Literatur

- [1] H. Hähnel, *Anwendung der FE-Methode auf stochastische Randanfangswertprobleme*, Diplomarbeit, TU Chemnitz, 2004
- [2] H. Hähnel, J. v. Scheidt, *Zufällige Wärmeleitung im Stab*, Beitrag im Tagungsband zum Workshop „Stochastische Analysis“, TU Chemnitz, 2004
- [3] A. Kandler, M. Richter, J. v. Scheidt, *Parabolische Randanfangswertprobleme mit zufälliger Anfangsbedingung*, Beitrag im Tagungsband zum Workshop „Stochastische Analysis“, TU Chemnitz, 2004
- [4] A. Kandler, *Parabolische Randanfangswertaufgaben mit zufälliger Anfangs- und Randbedingung*, Dissertation, TU Chemnitz, 2006
- [5] A. Kielbasinski, H. Schwetlick *Numerische lineare Algebra*, Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1988
- [6] M. Jung, U. Langer, *Methode der finiten Elemente für Ingenieure*, B.G. Teubner, Stuttgart, 2001
- [7] H.-J. Starkloff, R. Wunderlich, *Stationary solutions of linear ODEs with a randomly perturbed system matrix and additive noise*, Beitrag im Tagungsband zum Workshop „Stochastische Analysis“, TU Chemnitz, 2004
- [8] E. Zeidler, *Nonlinear functional analysis and its applications. I*, Springer, New York, 1986